Исследовательские задачи.

Задача о цепочке неравенств

Дана последовательность из $N-1$ **чередующихся** строгих неравенств, начинающаяся с неравенства < (меньше). Требуется определить — можно ли вставить в эту последовательность числа $1 \ldots N$ так, чтобы выполнялись *все* неравенства.

Если это возможно, то предложить порядок расстановки чисел. Например, последовательность неравенств:

$$\cdot < \cdot > \cdot < \cdot$$

допускает следующую расстановку чисел $1 \ldots 4$:

$$1 < 4 > 2 < 3$$

Ниже приведены несколько задач, объединённых этим сюжетом, где требуется подсчитать количество некоторых комбинаторных объектов любым доступным вам способом, включая полный перебор для относительно небольших N.

A. *Сколько способов (основная задача)*

Нетрудно заметить, что в приведённом выше примере расстановка чисел неединственна:

$$1 < 4 > 2 < 3$$

$$1 < 3 > 2 < 4$$

$$2 < 3 > 1 < 2$$

$$3 < 4 > 1 < 2$$

Требуется определить количество возможных расстановок чисел $1 \ldots N$.

B. *Сколько способов (числа $1 \ldots N-1$)*

Пусть количество чисел теперь равно $N-1$. Требуется определить количество расстановок чисел в данной цепочке неравенств при условии, что надо использовать все места и *все* числа. Таким образом ровно одно число разрешается использовать дважды.

C. *Сколько способов (нестрого)*

Решить предыдущую задачу при условии, что два равных числа можно поставить рядом (видимо это эквивалентно замене всех неравенств на нестрогие).