

Системы счисления.

Задачи, которые стоит сделать: В, С, D, J, L, M, N, P, Q, R, S, V, W (!)

A. Перевод двоичной дроби в десятичную

Переведите число из двоичной системы счисления в десятичную.

Дано число, представленное в виде двоичной дроби: запись длиной не более 30 символов, содержащая цифры 0 и 1 и, возможно, одну точку.

Необходимо вывести данное число в виде десятичной дроби (тип переменной `float` с точностью не менее 12 знаков).

Input	Output
0.11	0.75
11.111	3.875

B. Перевод десятичной дроби в двоичную

Переведите десятичное число в двоичную систему.

Дано действительное неотрицательное число, не превосходящее 100, записанное в десятичном виде. Целые числа при этом могут не содержать точку.

Необходимо представить число в виде двоичной дроби с фиксированной точкой и вывести это представление. Ответ должен отличаться от правильного не более, чем на 2^{-32} .

Input	Output
0.5	0.1
0.1	0.00011001100110011001100110011001100110011001100110011001100110

C. Перевод двоичной периодической дроби в десятичную

Дана запись целого двоичного числа или двоичной периодической дроби, которая включает в себя:

- Обязательную целую часть.
- Обязательный символ точки, отделяющий целую часть от дробной (если дробная часть существует).
- Необязательную дробную непериодическую часть.
- Необязательную периодическую дробную часть, записываемую в круглых скобках.

Необходимо определить значение этой дроби, сохранить его в переменной типа `float`, при этом выведенное значение должно отличаться от истинного не более, чем на 10^{-12} . Общая длина входной строки не превосходит 30 символов.

(!) Подумайте сколько двоичных разрядов необходимо взять для получения требуемой точности, выраженной в количестве десятичных знаков.

Input	Output
0.1	0.5
0.(01)	0.33333333333333331483

D* Перевод рационального числа в периодическую двоичную дробь

Дано рациональное число. Запишите его в виде двоичной периодической дроби.

На вход программа получает два натуральных числа N и M , каждое из которых не превосходит 1000.

Программа должна вывести значение N/M , записанное в виде двоичной периодической дроби, при этом длина непериодической дробной части и длина периода должны быть минимально возможными. Если данное число является конечной двоичной дробью, периодическую часть выводить не надо. Решение должно иметь сложность $O(P)$, где P — длина периода дроби.

Input	Output
1 2	0.1
1 3	0.(01)

E. Перевод двоичной периодической дроби в рациональное число

Дана запись двоичной дроби, как в задаче C. В целых числах точка не ставится. Необходимо представить её в виде несократимой рациональной дроби N/M .

Программа должна вывести значения N и M .

Input	Output
0.1	1 2
0.(001)	1 7

F. Перевод рационального числа в периодическую десятичную дробь

Напишите программу, которая переводит правильную дробь в десятичную, выделив (если нужно), период дроби.

Входная строка содержит два числа M и N , разделённых пробелами. Гарантируется, что $M < N$. Программа должна вывести десятичную запись дроби, выделив (если нужно) её период. В качестве разделителя целой и дробной части используйте точку.

Решение должно иметь сложность $O(P)$, где P — длина периода дроби.

Input	Output
1 2	0.5
3 14	0.2(142857)

G. Перевод из любой системы в любую

Напишите программу, переводящую запись числа между двумя произвольными системами счисления.

На вход программа получает три величины: N, A, K , где N и K — натуральные числа, основания системы счисления ($2 \leq N, K \leq 36$), A — целое число, записанное в системе счисления с основанием N , $0 \leq A < 2^{31}$.

Необходимо вывести значение A в системе счисления с основанием K без лидирующих нулей.

Input	Output
2 101111 16	2F
10 35 36	Z

H. Произвольная СС: инкремент

Первая строка входных данных содержит последовательность символов '0', ..., '9', 'A', ..., 'Z', являющейся записью некоторого неотрицательного числа в системе счисления с основанием `base`. Длина числа не превосходит 100000 символов. Вторая строка входных данных содержит основание системы счисления `base`, не превосходящее 36.

Увеличьте это число на 1 и выведите результат в той же системе счисления.

Input	Output
19A 11	1A0

I. Произвольная СС: декремент

Первая строка входных данных содержит последовательность символов '0', ..., '9', 'A', ..., 'Z', являющейся записью некоторого неотрицательного числа в системе счисления с основанием `base`. Длина числа не превосходит 100000 символов. Вторая строка входных данных содержит основание системы счисления `base`, не превосходящее 36.

Уменьшите это число на 1 и выведите результат в той же системе счисления.

Input	Output
1A0 11	19A

J. Произвольная СС: сложение

Первая и вторая строки входных данных содержат последовательности символов '0', ..., '9', 'A', ..., 'Z', являющиеся записью некоторых неотрицательных чисел в системе счисления с основанием `base`. Длина чисел не превосходит 50000 символов. Третья строка входных данных содержит основание системы счисления `base`, не превосходящее 36. Гарантируется, что первые две строки являются корректной записью чисел в системе счисления с основанием `base`.

Выведите результат сложения данных чисел в той же системе счисления.

Input	Output
2 2 3	11
AAA 1 11	1000
245DSF 1010101Z 36	10346DUE

Рассмотрим последовательность Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 2$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n > 2$. Первые элементы этой последовательности таковы: $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$ и т.д.

Любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких членов последовательности Фибоначчи. Такое представление будет неоднозначным (приведите пример). Однако, если потребовать, чтобы в представлении не было двух соседних членов последовательности Фибоначчи, то представление становится единственным (докажите!). Будем говорить, что число A представимо в фибоначчиевой системе счисления (ФСС) в виде $a_k a_{k-1} \dots a_1$, где $a_i \in \{0; 1\}$, если $A = a_k \cdot F_k + \dots + a_1 \cdot F_1$ и в записи $a_k a_{k-1} \dots a_1$ нет двух единиц подряд.

Вот как записываются небольшие числа в фибоначчиевой системе счисления:

Десятичная	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Фибоначчиева	0	1	10	100	101	1000	1001	1010	10000	10001	10010	10100	10101

К. Перевод из ФСС (фибоначчиевой СС) в десятичную

Дана запись числа в фибоначчиевой системе счисления. Запишите его в десятичной системе счисления.

Программа получает на вход строку из символов 0 и 1 и должна вывести одно целое число. Гарантируется, что результат принимает значения от 0 до $2 \cdot 10^9$.

Input	Output
10101	12

Л. Перевод из десятичной в ФСС

Дано целое число от 0 до $2 \cdot 10^9$. Выведите его представление в фибоначчиевой системе счисления без лидирующих нулей.

Input	Output
12	10101

М. ФСС: инкремент

Дано целое неотрицательное число N , записанное в фибоначчиевой системе счисления, длина числа не превосходит 100000 символов. Выведите значение числа $N + 1$ в фибоначчиевой системе счисления.

Input	Output
100101	101000

Н. ФСС: декремент

Дано натуральное число N , записанное в фибоначчиевой системе счисления, длина числа не превосходит 100000 символов. Выведите значение числа $N - 1$ в фибоначчиевой системе счисления.

Input	Output
101000	100101

О. ФСС: сложение

Даны два числа, записанные в фибоначчиевой системе счисления, длины чисел не превосходят 100000 символов. Выведите значение их суммы в фибоначчиевой системе счисления.

Input	Output
10010 10101	1000001

В троичной взвешенной системе счисления (ТВСС) используется основание 3 и три цифры: 0, 1 и -1 . Цифру -1 будем обозначать знаком \$. Достоинство уравновешенной троичной системы счисления: простота хранения отрицательных чисел и удобство нахождения числа, противоположного данному.

Вот как записываются небольшие числа в уравновешенной троичной системе счисления:

Десятичная	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТВСС	\$00	\$01	\$1\$	\$10	\$11	\$\$	\$0	\$1	\$	0	1	1\$	10	11	1\$\$	1\$0	1\$1	10\$	100

Р. Перевод из ТВС в десятичную

Дана запись числа в уравновешенной троичной системе счисления. Переведите его в десятичную. Гарантируется, что ответ не превосходит по модулю 10^9 .

Input	Output
\$01	-8

Q. Перевод из десятичной в ТВС

Дано целое число от $-2 \cdot 10^9$ до $2 \cdot 10^9$. Выведите его представление в уравновешенной троичной системе счисления без лидирующих нулей.

Input	Output
-8	\$01

R. *TBC: инкремент*

Дана запись некоторого числа в уравновешенной троичной системе счисления, длина записи не превосходит 100000 символов.

Увеличьте это число на 1 и выведите его значение в той же системе.

Input	Output
\$01	\$1\$

S. *TBC: декремент*

Дана запись некоторого числа в уравновешенной троичной системе счисления, длина записи не превосходит 100000 символов.

Уменьшите это число на 1 и выведите его значение в той же системе.

Input	Output
\$1\$	\$01

T. *TBC: сложение*

Дано два числа, записанных в уравновешенной троичной системе счисления. Выведите их сумму без лидирующих нулей. Длины входных чисел не превосходят 100000 символов.

Input	Output
1\$\$\$ \$0\$	11

Пояснение: приведённый пример соответствует выражению $14 + (-10) = 4$.

U. *Красивые числа*

Требуется по заданным числам N и K найти такое D , чтобы число N в системе счисления с основанием D заканчивалось как можно большим количеством цифр K .

Вводятся два целых десятичных числа N и K ($1 \leq N \leq 10^{11}; 0 \leq K \leq 9$).

Выведите два числа: d — искомое основание системы счисления и L — количество цифр K , которым заканчивается запись числа N в этой системе счисления. Если искомого D несколько, выведите любое из них, не превосходящее 10^{12} (такое всегда существует).

Input	Output
49 1	3 2
7 5	3 0
4 4	5 1
9 9	10 1

V. *Дырявое множество*

Определим множества $K[i]$ рекуррентно. Пусть $K[0] = [0, 1]$. Разделим сегмент $[0, 1]$ на три части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ и удалим из него интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Получим множество $K[1]$, состоящее из двух оставшихся сегментов $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$.

Каждый из них разделим на три части (точками $\frac{1}{9}$ и $\frac{2}{9}$ для первого сегмента, и точками $\frac{7}{9}$ и $\frac{8}{9}$ для второго) и удалим средние интервалы $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Таким образом получаем множество $K[2]$, и т.д.

Пусть мы построили множество $K[i]$. Поделим каждый оставшийся сегмент из $K[i]$ на 3 части и удалим из этих сегментов средние интервалы. Получим, таким образом, из $K[i]$ множество $K[i+1]$. Вводятся 3 целых числа n, a, b ($a \leq b$). Необходимо определить, принадлежит ли точка с координатой $\frac{a}{b}$ множеству $K[n]$.

Input	Output
1 2 4	NO
2 13 18	YES

W. *Круглые факториалы*

Требуется по заданным числам N и K найти количество нулей в конце записи в системе счисления с основанием K числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N - 1) \cdot N$.

В первой строке входных данных содержатся числа N и K , разделённые пробелом, $1 \leq N \leq 10^9, 2 \leq K \leq 1000$.

Выведите число X — количество нулей в конце записи числа $N!$ в системе счисления с основанием K .

Input	Output
5 10	1
1 2	0
100 10	24
1000 10	249