Системы счисления.

Системы счисления бывают разными. Самая простая, древняя и естественная - унарная система.
Грубо говоря, забил мамонта - нарисовал черточку на стене пещеры, забил второго - нарисовал еще одну, и так далее. Сколько черточек - столько мамонтов. Удобно! Но только до тех пор, пока число подсчитываемых мамонтов невелико, и хранить и передавать эту информацию особо не требуется. А вот если считать зернышки пшеницы, например, и часть из них отдавать в виде налога фараону, уже не так удобно, и нужно придумать что-то другое.

Скажем, можно обозначить некоторые разные числа разными значками, а те числа, на которые значков не хватило, получать из тех, на которые хватило, повторяя их нужное количество раз. Обозначил число 1 - мышкой, 5 - котиком, 10 - песиком, и вот уже два песика, котик и три мышки - это 28. Примерно так и делали - в Древнем Египте или в Древнем Риме, значки только другие были. Это - непозиционная система счисления, и в ней каждый символ означает строго определенное число, и смысл его не зависит от местоположения символа в записи составного числа. Не то что черточки на стене рисовать, наглядно, красиво и удобно!
Но только до тех пор, пока число подсчитываемых объектов умеренно велико, и нет особой нужны механизировать счет. А вот если нужно уметь быстро складывать или вычитать относительно большие числа (от 1000) - уже не так удобно: попробуй-ка сложи три значка с цветком лотоса с двумя значками с жабой.

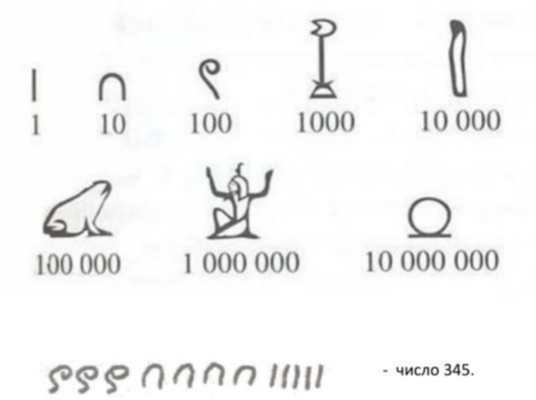

Рис. 1: 345

А вот если мы возьмем все числа от одного до девяти и каждому придумаем свой символ, его обозначающий (назовем этот символ цифрой), а потом возьмем и запишем один и тот же символ несколько раз в ряд. Например, три раза. А потом скажем так: в самом правом положении этот символ будет означать число единиц, во втором справа - число десятков, в третьем справа - число сотен и так далее. И тогда получить любое число будет почти так же просто, как и в непозиционной системе счисления: мы просуммируем столько раз по сто, сколько обозначает символ-цифра в третьей справа позиции, к полученному числу прибавим столько раз по десять, сколько указывает цифра во второй справа позиции и к результату прибавим столько, сколько указывает цифра в первой справа позиции. Это - позиционная система счисления. В ней смысл символа очень даже зависит от его местоположения в записи составного числа. Осталось только придумать специальный символ, означающий отсутствие некоторой части в составном числе: например, отсутствие десятков или единиц. Так и появился ноль.

Кроме удобства записи больших составных чисел, есть еще одно - огромное! - преимущество по сравнению с непозиционной системой счисления: числа в позиционной системе счисления (СС) удобно складывать в столбик. Если мы при сложении двух цифр в самой правой позиции получаем число, меньшее десяти (т.е. результат не выходит за пределы *единиц*), то мы его просто записываем в той же позиции. Например $2 + 4 = 6$. А вот если мы складываем 5 и 7 в правой позиции, то у нас результат не влезает в эту нашу правую позицию. И это правильно: 12 - это один десяток и две единицы. Поэтому две единицы мы оставляем в позиции для единиц, самой правой, а десяток отправляем туда, где ему и положено быть - во вторую справа позицию. И так далее: этот прием не зависит от номера позиции, в которой производится суммирование. Первый шаг к автоматизации счета сделан!

Но подсчет чего-либо десятками (десятиричная система, или СС с основанием 10) - это дань человеческой анатомии. Никто не мешает выбрать нам не 10, а, предположим, 4 символа и ноль (итого 5 символов), и сказать - теперь считаем пятерками, а не десятками. И вот у нас появилась пятиричная система счисления. Правила записи, суммирования и вычитания в ней будут такие же, как и в привычной десятиричной - с поправкой на то, что перенос в более левую позицию будет случаться чаще.

В реальной жизни, кроме всем привычной десятичной системы, широко используются еще несколько позиционных СС. Какие?
В программировании же применяются двоичная, шестнадцатричная, 64-ричная и, реже, 8-ричная.

А как переводить из одной СС в другую?

Привычнее всего это делать через десятиричную СС - просто потому что в обычной жизни человек именно в ней и считает. Хотя в некотрых случаях пересчет из одной СС в другую легко сделать и не переводя число в десятичную СС.

Перевод целого числа из десятичной системы счисления в любую позиционную систему счисления с основанием b (b > 1):
1. Разделить число на основание новой системы счисления нацело. Остаток записать.
2. Получившееся частное опять разделить на основание новой системы счисления. Остаток записать.
3. Повторять пункт 2 до тех пор, пока в частном не получится 0.
4. Собрать число из последовательности остатков, записанных в обратном порядке.
Последнее правило удобнее реализовать, выполняя деление в столбик.

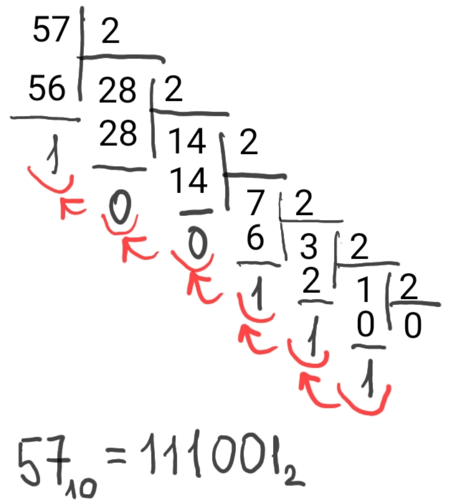

Рис. 2: 57

Перевод числа из любой позиционной СС в десятичную.
Можно заметить, что любое число в десятичной СС - это сумма произведений каждой из цифр числа на 10 в степени, соответствующей позиции цифры в числе. Например,

$$2024_{10} = 2 * 10^4 + 0 * 10^2 + 2 * 10^1 + 4 * 10^0 = 2 * 1000 + 0 * 100 + 2 * 10 + 4 = 2000 + 20 + 4. \quad (1)$$

То же самое верно и для любой другой позиционной СС. Например, 124 в 6-ричной системе счисления это

$$124_6 = (1 * 6^2 + 2 * 6^1 + 4 * 6^0)_{10} = (36 + 12 + 4)_{10} = 52_{10} \quad (2)$$

Подобная запись числа в виде суммы произведений разрядной цифры на основание СС в соответствующей степени называется развернутой формой числа.
Вышеописанное верно для перевода из любой позиционной системы счислений в любую. Но, если нам надо перевести число из 13-ричной, скажем, в 6ричную (зачем-то), то нам придется выписывать остатки деления чисел в13ой ричной системе на 6 и выполнять все вычисления при делении в столбик по модулю 13. Что, в общем-то, требует некоторой сноровки и внимательности. Поэтому для таких странных переводов зачастую проще считать через десятичную систему: сперва переведем число из 13ричной в десятичную СС, а потом полученное число запишем уже в 6ричной СС.
Но для переводов, где одна СС является точной степенью другой СС, перевод становится чуть более простым. Пусть p, q - основания СС, причем p = q^k. Тогда каждая цифра в алфавите СС с основанием p представляется в виде k-значного числа в СС с основанием q.
Пример: p = 16, q = 2

$0_{16} = 0000_2$	$8_{16} = 1000_2$
$1_{16} = 0001_2$	$9_{16} = 1001_2$
$2_{16} = 0010_2$	$A_{16} = 1010_2$
...	...
$7_{16} = 0111_2$	$F_{16} = 1111_2$

Для того, чтобы перевести число $E2_{16}$ в двоичную систему счисления нужно просто взять соответсвующие цифрам 16ричной системы счисления числа двоичной: $E2_{16} = 1110\ 0010_2$
Из двоичной СС в шестнадцатиричную перевод будет аналогичным: нужно разбить двоичное число на четверки символов, и для каждой такой четверки записать соответствующую ей цифру 16ричнй системы счисления. Если число знаков двоичной записи не кратно 4, можно просто дописать слева незначащие нули.

А как быть с дробями?
А с дробями почти так же, как и с целыми числами, только для того, чтобы перевести из десятичной дроби в k-ричную, нужно не делить на основание k, а умножать, и записывать не остатки от деления, а единицы в целой части. Тут следует заметить, что дробь, будучи конечной в исходной СС, совершенно не обязательно будет конечной в новой СС, поэтому перевод дроби в новую СС заканчивается, когда в результате очередного умножения дробная часть не становится равной нулю, либо не достигнута требуемая точность.

Перевод десятичной дроби q: $0 <= q < 1$.
1. Умножаем исходную десятичную дробь на основание новой системы счисления.
2. Записываем целую часть получившегося произведения.
3. Умножаем дробную часть получившегося произведения на основание новой системы счисления. Записываем целую часть произведения.
4. Повторяем пункт 3 до тех пор,пока дробная часть не станет равной 0 либо не будет достигнута требуемая точность дробной части в новой СС.
5. Собираем записанные целые части в прямом порядке, записывая их в алфавите новой СС.