7. Синтаксис Python. Функции, рекурсия.

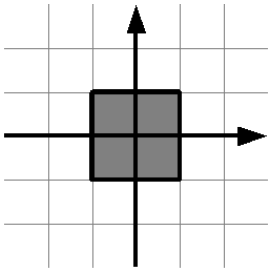
A. *Длина отрезка*

Даны четыре действительных числа: x_1, y_1, x_2, y_2. Напишите функцию `distance(x1, y1, x2, y2)`, вычисляющую расстояние между точкой (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Считайте четыре действительных числа и выведите результат работы этой функции.

Input	Output
0 0 1 1	1.4142135623730951

B. *Принадлежит ли точка квадрату - I*

Даны два действительных числа x и y. Проверьте, принадлежит ли точка с координатами (x, y) заштрихованному квадрату (включая его границу). Если точка принадлежит квадрату, выведите слово `YES`, иначе выведите слово `NO`. На рисунке сетка проведена с шагом 1.



Решение должно содержать функцию `IsPointInSquare(x, y)`, возвращающую `True`, если точка принадлежит квадрату и `False`, если не принадлежит. Основная программа должна считать координаты точки, вызвать функцию `IsPointInSquare` и в зависимости от возвращённого значения вывести на экран необходимое сообщение.

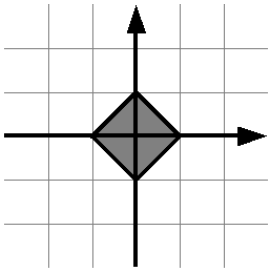
Функция `IsPointInSquare` не должна содержать инструкцию `if`.

Input	Output
0 0	YES

Input	Output
3 -7	NO

C. *Принадлежит ли точка квадрату - II*

Решите аналогичную задачу для такого квадрата:

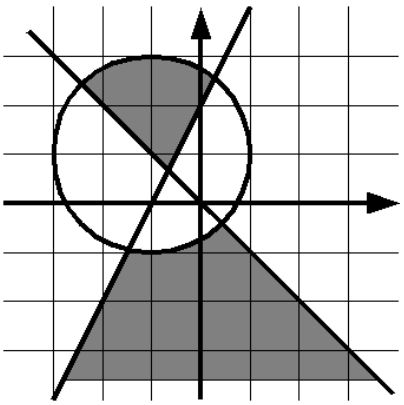


Решение должно соответствовать требованиям для решения задачи B.

Input	Output
1 1	NO

D. *Принадлежит ли точка области*

Проверьте, принадлежит ли точка данной закрашенной области:



Решение оформите в виде функции `IsPointInArea(x, y)`.

Решение должно соответствовать требованиям для решения задачи B.

Input	Output
-1 2	YES

E. *Минимальный делитель числа*

Дано натуральное число $n > 1$. Выведите его наименьший делитель, отличный от 1.

Решение оформите в виде функции `MinDivisor(n)`. Алгоритм должен иметь сложность $O(\sqrt{n})$.

Указание: Если у числа n нет делителя не превосходящего $\sqrt{n}$, то число n — простое и ответом будет само число n.

Input	Output
4	2

F. *Проверка числа на простоту*

Дано натуральное число $n > 1$. Проверьте, является ли оно простым.

Программа должна вывести слово `YES`, если число простое и `NO`, если число составное.

Решение оформите в виде функции `IsPrime(n)`, которая возвращает `True` для простых чисел и `False` для составных чисел. Решение должно иметь сложность $O(\sqrt{n})$.

Input	Output
4	NO

G. *Дружественные числа*

Дружественные числа — это два натуральных числа, таких, что сумма всех делителей одного числа (меньших самого этого числа) равна другому числу, и наоборот (дружественными являются, например, 220 и 284).

Напишите программу, которая проверяет пару чисел на «дружественность». Используйте функцию, которая вычисляет сумму делителей числа.

Input	Output
220 284	YES

H. *Дружественные числа в диапазоне*

Дружественные числа — это два натуральных числа, таких, что сумма всех делителей одного числа (меньших самого этого числа) равна другому числу, и наоборот (дружественными являются, например, 220 и 284).

Напишите программу, которая находит все пары не равных друг другу дружественных чисел в заданном диапазоне. Используйте функцию, которая вычисляет сумму делителей числа.

В каждой паре сначала выводится мéньшее число. Пары чисел должны выводиться в порядке возрастания первого числа из пары.

В случае, если таких пар в указанном диапазоне нет, вывести число 0.

Input	Output
1000 5000	(1184,1210) (2620,2924)

I. *Сумма цифр не меняется*

Напишите программу, которая находит все числа в диапазоне от a до b, сумма цифр которых не меняется при умножении на $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 (например, число 9). Используйте функцию для вычисления суммы цифр числа.

Выведите числа, соответствующие условию задачи, в возрастающем порядке через пробел. Если на указанном отрезке таких чисел нет — ничего не выводите.

Input	Output
9 90	9 18 45 90

J. *Гиперпростые числа*

Простое число называется *гиперпростым*, если любое число, получающееся из него откидыванием нескольких последних цифр, тоже является простым. Например, число 733 — гиперпростое, так как и оно само, и числа 73 и 7 — простые. Напишите программу, которая определяет, верно ли, что переданное ей число N —- гиперпростое. Учтите, что число 1 не считается простым.

Input	Output
733	YES

K. *Гиперпростые числа в диапазоне*

Напишите программу, которая находит все гиперпростые числа в заданном диапазоне. Если в указанном диапазоне гиперпростых чисел нет, вывести число 0.

Input	Output
30 100	31 37 53 59 71 73 79

Все задачи L–ZD следует решить при помощи рекурсивных функций.

Для изменения предельной глубины рекурсии используйте функцию `setrecursionlimit` из модуля `sys`.

Глубина рекурсии — максимальное количество вызванных, но незаконченных (отложенных) функций в ходе выполнения программы. По умолчанию глубина рекурсии равна 1000. Пример использования:

```
from sys import setrecursionlimit

...описания функций

setrecursionlimit(200000)

...текст программы
```

L. *Сумма чисел*

Дана последовательность чисел, завершающаяся числом 0. Найдите сумму всех этих чисел, не используя цикл.

Input	Output
1 2 3 0	6

M. *Разворот последовательности*

Дана последовательность целых чисел, заканчивающаяся числом 0. Выведите эту последовательность в обратном порядке.

Решение этой задачи при помощи рекурсии позволяет обойтись без списков, строк и прочих структур данных для сохранения всех введённых чисел.

Input	Output
1 2 3 0	0 3 2 1

N. *Алгоритм Евклида*

Даны два натуральных числа A и B. Требуется найти их наибольший общий делитель при помощи уже известного вам алгоритма Евклида.

Решение будет принято только если рекурсивная функция, вычисляющая НОД, будет иметь ОДИН условный оператор.

Input	Output
12 16	4

O. *Наименьшее общее кратное*

Наименьшее общее кратное (НОК) двух натуральных чисел —- это наименьшее число, которое делится нацело на оба исходных числа. Напишите программу, которая вычисляет НОК двух чисел.

Input	Output
12 16	48

P. *Быстрое возведение в степень*

Дано вещественное число a и неотрицательное целое n. Вычислите a^n.

Указание: воспользуйтесь тождествами $a^{2n} = (a^n)^2$ и $a^{2n+1} = a^{2n} \cdot a$

Input	Output
1.000000001 1000000000	2.7182820387553908

Q. *Количество вызовов функции (числа Фибоначчи)*

Как известно, очередное число Фибоначчи равно сумме предыдущих двух. Первое и второе число Фибоначчи равны единице.

Программист Вася написал вычисление n-ого числа Фибоначчи с помощью рекурсивной функции. А сколько раз запустится эта функция прежде, чем будет получено значение?

Input	Output
3	3

R. *Биномиальные коэффициенты*

По данным числам n и k ($0 \leqslant k \leqslant n$) вычислите C_n^k. Для решения используйте рекуррентное соотношение $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Input	Output
6 3	20

S. *Сложение без сложения*

Напишите рекурсивную функцию `sum(a, b)`, возвращающую сумму двух целых неотрицательных чисел. Из всех арифметических операций допускаются только $+1$ и -1. Циклы использовать нельзя.

Input	Output
2 2	4

T. *Рекурсивный перевод из двоичной системы с десятичную*

Переведите число из двоичной системы счисления в десятичную.

Input	Output
1010	10

U. *Сумма двоичных строк*

Даны две строки, содержащие двоичные представления неотрицательных целых чисел a и b.

Строки могут содержать до 5000 символов.

Напишите рекурсивную функцию вычисления их суммы $a + b$ без использования перевода этих чисел в десятичную систему счисления.

Указание: реализуйте отдельную функцию для прибавления к двоичной строке единицы, чтобы не «нагружать» этим рекурсивные вызовы.

Input	Output
101 110	1011

V. *Произведение двоичных строк*

Даны две строки, содержащие двоичные представления неотрицательных целых чисел a и b.

Строки могут содержать до 1000 символов.

Напишите рекурсивную функцию вычисления их произведения $a \cdot b$ без использования перевода этих чисел в десятичную систему счисления.

Input	Output
101 110	11110

W. *Рекурсивный перевод из десятичной системы в P-ичную*

Напишите рекурсивную функцию для перевода десятичного числа в P-ичную.

Подсказка: считайте входное число как строку и «собирайте» ответ с конца, т.е. с младшего разряда.

Input	Output
3 123	123(10)=11120(3)

X. *Фишки*

Дана полоска из клеток, пронумерованных от 1 до N. На каждом ходе разрешено поставить фишку на клетку (если её там еще нет) или снять фишку с клетки (если она там есть). При этом, можно выбрать не любую клетку, а только клетку под номером 1 или клетку, следующую за самой первой фишкой.

Изначально полоска пуста. Требуется занять все клетки.

Количество действий не должно превышать 10^4. Если существует несколько возможных решений задачи, то разрешается вывести любое.

Input	Output
3	1 2 -1 3 1

Y. *Ханойские башни*

Головоломка «Ханойские башни» состоит из трех стержней, пронумерованных числами $1, 2, 3$. На стержень 1 надета пирамидка из n дисков различного диаметра в порядке убывания диаметра (наверху самый маленький диск). Диски можно перекладывать с одного стержня на другой по одному, при этом диск нельзя класть на диск ме́ньшего диаметра. Необходимо переложить всю пирамидку со стержня 1 на стержень 3 за минимальное число перекладываний.

Напишите программу, которая решает головоломку; для данного числа дисков n печатает последовательность перекладываний в формате `a b c`, где `a` — номер перекладываемого диска, `b` — номер стержня с которого снимается данный диск, `c` — номер стержня на который надевается данный диск.

Например, строка `1 2 3` означает перемещение диска номер `1` со стержня `2` на стержень `3`. В одной строке печатается одна команда. Диски пронумерованы числами от 1 до n в порядке возрастания диаметров.

Input	Output
2	1 1 2 2 1 3 1 2 3

Z* *Ремонт в Ханое*

Решите задачу Y со следующим ограничением: запрещено перекладывать диски со стержня 1 на стержень 3 и наоборот.

Вам не нужно находить минимальное решение, но количество совершённых перемещений не должно быть больше 200000, при условии, что количество дисков не превосходит 10.

Input	Output
2	1 1 2 1 2 3 2 1 2 1 3 2 1 2 1 2 2 3 1 1 2 1 2 3

ZA* *Циклические башни*

Решите задачу Y со следующим ограничением: диск со стержня 1 можно перекладывать только на стержень 2, со стержня 2 на 3, а со стержня 3 на 1.

Вам не нужно находить минимальное решение, но количество совершённых перемещений не должно быть больше 200000, при условии, что количество дисков не превосходит 10.

Input	Output
2	1 1 2 1 2 3 2 1 2 1 3 1 2 2 3 1 1 2 1 2 3

ZB* *Несправедливые башни*

Решите задачу Y со следующим ограничением: запрещено класть самый маленький **диск** (номер 1) на **средний** колышек (номер 2).

Input	Output
2	1 1 3 2 1 2 1 3 1 2 2 3 1 1 3

ZC* *Сортирующие башни*

Решите задачу Y в такой формулировке: первоначально все диски лежат на стержне номер 1. Переместите диски с нечётными номерами на стержень номер 2, а с чётными номерами — на стержень номер 3.

Input	Output
3	1 1 2 2 1 3 1 2 3 3 1 2 1 3 2

ZD* *Обменные башни*

Как и в предыдущих задачах, дано три стержня, на первом из которых надето n дисков различного размера. Необходимо их переместить на стержень 3 по следующим правилам:

Самый маленький диск (номер 1) можно в любой момент переложить на любой стержень. Перемещение диска номер 1 со стержня a на стержень b будем обозначать `1 a b`.

Можно поменять два диска, лежащих на вершине двух стержней, если размеры этих дисков отличаются на 1. Например, если на вершине стержня с номером a лежит диск размером 5, а на вершине стержня с номером b лежит диск размером 4, то эти диски можно поменять местами. Такой обмен двух дисков будем обозначать `0 a b` (указываются номера стержней, верхние диски которых обмениваются местами).

Для данного числа дисков n, не превосходящего 10, найдите решение головоломки. Вам не нужно находить минимальное решение, но количество совершённых перемещений не должно быть больше 200000.

Input	Output
2	1 1 3 0 1 3 1 1 3