

Программирование, 10-й класс

Листок 12: Динамическое программирование и жадные алгоритмы.

Вводные задачи

1. Кузнечик живёт на болоте, представляющем собой прямую, на целочисленных точках которой находятся кочки.

Кузнечик находится на кочке с координатой 0 и умеет прыгать только вправо на любое расстояние от 1 до k . Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кочки с координатой ровно n ?

2. По заданным натуральным n и k подсчитать C_n^k , используя один массив, содержащий $k + 1$ элементов.
3. (912) Определите количество последовательностей из нулей и единиц длины N (длина — это общее количество нулей и единиц), в которых никакие три единицы не стоят рядом.

Вводится натуральное число N , не превосходящее 40.

4. Жизнь кузнечика из первой задачи оказалась под угрозой. На некоторых кочках сидят лягушки. Попадание на кочку с лягушкой означает неминуемую гибель кузнечика. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до точки с координатой n ?

Входные данные: файл *input.txt*, содержащий две строки. В первой указано натуральное число k — длина максимального прыжка. Во второй строке через пробел указано n чисел: нули соответствуют кочкам, на которых сидят лягушки, единицы соответствуют пустым кочкам. Первое и последнее число — единицы.

5. (914) При переработке радиоактивных материалов образуются отходы трех видов — особо опасные (тип А), неопасные (тип В) и совсем не опасные (тип С). Для их хранения используются одинаковые контейнеры. После помещения отходов в контейнеры последние укладываются вертикальной стопкой. Стопка считается взрывоопасной, если в ней подряд идет более одного контейнера типа А. Стопка считается безопасной, если она не является взрывоопасной.

Для заданного количества контейнеров N определить число безопасных стопок.

6. (915) Мальчик подошел к платной лестнице. Чтобы наступить на любую ступеньку, нужно заплатить указанную на ней сумму. Мальчик умеет перешагивать на следующую ступеньку, либо перепрыгивать через ступеньку. Требуется узнать, какая наименьшая сумма понадобится мальчику, чтобы добраться до верхней ступеньки.
7. (2968) Имеется калькулятор, который выполняет три операции:

1. прибавить к числу X единицу
2. умножить число X на 2
3. умножить число X на 3

Определите кратчайшую последовательность операций, необходимую для получения из числа 1 заданное число N .

Выведите строку, состоящую из цифр 1, 2 или 3, обозначающих одну из трех указанных операций, которая получает из числа 1 число N за минимальное число операций. Если возможных минимальных решений несколько, выведите любое из них.

8. (3297) Дети пошли в поход вдоль реки. Поход начинается на левом берегу, заканчивается на правом. Дана последовательность букв 'L', 'R', 'B', означающая с какой стороны в реку впадает приток: 'L' — слева (left), 'R' — справа (right), 'B' — с обеих сторон (both). Определить минимальное количество переправ, которое придется сделать школьникам.

Входные данные: строка, содержащая только символы R, L, B в произвольном порядке.

Выходные данные: одно число — наименьшее количество переправ.

Простые задачи на двумерную динамику

В задачах 9 и 10 разрешается передвигаться только вверх или вправо.

9. (206) В прямоугольной таблице $N \times M$ в начале игрок находится в левой верхней клетке. За один ход ему разрешается перемещаться в соседнюю клетку либо вправо, либо вниз (влево и вверх перемещаться запрещено). Посчитайте, сколько есть способов у игрока попасть в правую нижнюю клетку.

Входные данные: файл `input.txt`, содержащий прямоугольную таблицу с числами 0 и 1 — единицы соответствуют клеткам, которые разрешено посещать, нули — клеткам, которые запрещено посещать.

10. (944) В некоторых клетках прямоугольного клетчатого поля с путника взимают плату. За какую минимально возможную плату можно добраться из левой верхней в правую нижнюю клетку?

Входные данные: файл `input.txt`, содержащий прямоугольную таблицу с числами 0 и 1 — единицы соответствуют клеткам с монетой, нули — клеткам без монет.

11. Дана треугольная таблица из целых чисел. Какую минимальную сумму можно набрать, двигаясь из вершины вниз к левым и правым соседям?

Рассмотрим, например, такую таблицу:

```
    5
   4 6
  8 9 3
 3 6 2 6
```

Для неё минимальной получится сумма 16, соответствующая такому маршруту: $5 - 6 - 3 - 2$.

Задача о рюкзаке

12. (3090) Дано N предметов массой m_1, \dots, m_N и стоимостью c_1, \dots, c_N соответственно.

Ими наполняют рюкзак, который выдерживает вес не более M . Определите набор предметов, который можно унести в рюкзаке, имеющий наибольшую стоимость.

13. Есть металлический прут n дюймов длиной и таблица цен для всех длин $i : 1 \dots n$. Требуется определить наиболее выгодный способ разрезания прута на части.

Входные данные: одна строка, содержащая n натуральных чисел, записанных через пробел — цены кусков длины $1, 2, \dots, n$ соответственно.

Выходные данные: одно число — максимальная сумма, которую можно выручить, разрезая прут на части.

14. (3086) Дано натуральное число N . Необходимо представить его в виде суммы точных кубов, содержащей наименьшее число слагаемых. Программа должна вывести это число слагаемых.

Внимание: программа на Питоне не проходит все тесты по времени.

15. (3087) В некотором государстве в обращении находятся банкноты определенных номиналов. Национальный банк хочет, чтобы банкомат выдавал любую запрошенную сумму при помощи минимального числа банкнот, считая, что запас банкнот каждого номинала неограничен. Помогите Национальному банку решить эту задачу.

Внимание: программа на Питоне не проходит все тесты по времени.

16. (3092) Дан набор гирек массой m_1, \dots, m_N . Можно ли их разложить на две чаши весов, чтобы они оказались в равновесии?

Разные задачи

16. (210) В дощечке в один ряд вбиты гвоздики. Любые два гвоздика можно соединить ниточкой. Требуется соединить некоторые пары гвоздиков ниточками так, чтобы к каждому гвоздику была привязана хотя бы одна ниточка, а суммарная длина всех ниточек была минимальна.

17. (212) За билетами на премьеру нового мюзикла выстроилась очередь из N человек, каждый из которых хочет купить 1 билет. На всю очередь работала только одна касса, поэтому продажа билетов шла очень медленно, приводя постояльцев очереди в отчаяние. Самые сообразительные быстро заметили, что, как правило, несколько билетов в одни руки кассир продаёт быстрее, чем когда эти же билеты продаются по одному. Поэтому они предложили нескольким подряд стоящим людям отдавать деньги первому из них, чтобы он купил билеты на всех.

Однако для борьбы со спекулянтами кассир продавала не более 3-х билетов в одни руки, поэтому договориться таким образом между собой могли лишь 2 или 3 подряд стоящих человека.

Известно, что на продажу i -му человеку из очереди одного билета кассир тратит A_i секунд, на продажу двух билетов — B_i секунд, трех билетов — C_i секунд.

Напишите программу, которая подсчитает минимальное время, за которое могли быть обслужены все покупатели.

Обратите внимание, что билеты на группу объединившихся людей всегда покупает первый из них. Также никто в целях ускорения не покупает лишних билетов (то есть билетов, которые никому не нужны).

18. (1792) Дана последовательность чисел длины n . Определить наибольшую возрастающую подпоследовательность этой последовательности.

Можно сдать решение, время работы которого пропорционально n^2 .

Обратите внимание на задачу 1793 — задачу можно решить за время, пропорциональное $n \cdot \log n$.

- Решение за n^2

d_i — длина максимальной подпоследовательности, заканчивающейся элементом x_i .

$$d[0] = 1, d_i = 1 + \max\{d_j : 0 \leq j \leq i - 1, x[j] < x[i]\}$$

Здесь используется тот факт (оптимальность подзадач, см. выше), что если отбросить x_i из подпоследовательности длины $d[i]$, то подпоследовательность длины $d[i] - 1$, заканчивающаяся каким-то x_j также будет оптимальной, т.е. иметь максимальную длину из всех возможных, заканчивающихся элементом x_j .

Результат: $\max\{d[j] : 0 \leq j \leq n - 1\}$

Как искать конкретную возрастающую подпоследовательность данной длины (восстановление ответа), вариант — лексикографически наименьшую из всех возможных?

Ответ: хранить массив предшественников.

- Решение за $n \cdot \log n$

d_i — число, на которое заканчивается возрастающая подпоследовательность длины i . Поскольку $d_{i-1} \leq d_i$ для всех $i = 1 \dots n$ и каждый элемент $x[i]$ обновляет максимум одну ячейку массива d , то для вычисления d можно использовать бинарный поиск (*upper_bound*, т.е. позиция первого элемента, больше данного).

19. (1790) Даны две строки. Вывести длину самой большой их общей подпоследовательности и саму подпоследовательность.

Например, для строк `abccsaabc` и `scbsbaabc` ответ будет 6 (например — `abcaac`).

20. Студент Петя учится в университете и хочет посещать как можно больше спецкурсов. К сожалению, их количество не позволяет надеяться на то, что Петя сможет посетить все занятия. Петя составил их список и решил выяснить — какие спецкурсы ему надо посетить, чтобы их количество было максимальным?

Входные данные: в файле по одному на каждой строке перечислены промежутки времени: $start_i finish_i$ — натуральные числа, разделённые пробелом.

Выходные данные: промежутки из входного файла, перечисленные в порядке посещения.

21. Петя твёрдо решил, что ему необходимо если не посетить все спецкурсы, то получить представление о каждом из них. Петя решил договориться с друзьями — они распределят спецкурсы между собой, потом соберутся и каждый расскажет о тех, которые посетил.

Входные данные: в файле по одному на каждой строке перечислены промежутки времени: $start_i$ $finish_i$ — натуральные числа, разделённые пробелом.

Выходные данные: Минимальное количество человек, необходимое для посещения всех занятий и распределение спецкурсов по участникам.