

## Сортировка. Теоретические задачи.

Дано множество из  $N$  «камней» одинакового внешнего вида; мы можем сравнивать их по весу с помощью чашечных весов без гирь (на каждую чашку помещается ровно один камень).

Камни в произвольном порядке подаются через входное окошко в комнату, в которой находится Сортировщик (у которого имеются весы и стол, на котором он может выкладывать камни, делать на них и на столе пометки мелом и т.п.). От него требуется передать через выходное окошко все переданные ему камни, но в порядке неубывания веса. Окна односторонние (одно входное и одно выходное), других отверстий в комнате нет.

- A. Доказать, что если Сортировщик справится с задачей для любого порядка (имеется в виду порядок получения камней на входе), при некотором порядке в комнате окажутся все  $N$  камней.
- B. Сортировщик утверждает, что один из  $N$  камней — самый тяжелый. Он хочет убедить в этом скептика при помощи нескольких взвешиваний. За какое минимальное количество взвешиваний это точно удастся сделать?
- C. Отсортируйте 5 попарно разных камней за 7 взвешиваний. Решение представить в письменном виде.
- D. Докажите, что при некоторых порядках входа камней Сортировщику понадобится не менее  $\log(N!)$  взвешиваний.  
*Указание* Пусть все камни разные — сколько разных перестановок?

Алгоритм сортировки использует стратегию исключений, если во внешнем цикле находится сначала самый легкий камень и выдается в окно, затем следующий и т.д.

Стратегия сортировки включениями предполагает, что на столе в любой момент находится отсортированное подмножество камней (в начале — пустое). Основной цикл состоит в добавлении нового камня в это множество, чтобы не нарушать порядка.

Вопрос. Как вы думаете, в каких случаях выгоднее использовать каждый из этих алгоритмов?

В задаче сортировки включениями количество операций взвешивания имеет порядок теоретического минимума из зад. 4 (докажите!), но количество операций перемещения камней пропорционально  $N^2$ . Однако, «цена» этих операций ниже, это иллюстрирует следующая задача.

- E. Примем все камни, выложим на стол, перенумеруем их. Организуем на столе массив с бумажками, имеющими номера  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Будем теперь сортировать бумажки, причем весом бумажки будет считаться вес соответствующего камня. В конце выдаем в окно камни в порядке номеров на бумажках. Реализуйте этот алгоритм и сдайте программу преподавателю.

Сортировка слияниями реализует еще одну стратегию, основанную на идее «если есть два упорядоченных множества, их можно объединить за линейное время». Первоначально имеется  $N$  одноэлементных множеств, все они упорядочены.

- F. Есть  $N$  камней попарно разного веса. Пусть во всех камнях есть дырки, и первоначально их разделили поровну и надели как бусы на две веревки. Крайний камень можно снимать с левого конца веревки и надевать на правый. Есть еще две запасных веревки. Придумайте способ разместить все камни на одной веревке в порядке возрастания веса. Ограничение на количество всех операций (взвешиваний, сниманий, надеваний) не больше  $CN \log N$ , где  $C$  — константа, не зависящая от  $N$ .
- G. Имеется прибор для проверки идентичности денег, принимающий две купюры и сообщающий, «похожи» ли они. Купюры похожи, если они обе настоящие, или обе фальшивки от одного мастера. В контейнере  $N$  одинаковых на вид купюр, большинство из которых настоящие, а остальные могут быть фальшивками от одного или нескольких мастеров. Не более чем за  $N$  использований прибора найти настоящую купюру.

В этой задаче надо сформулировать в письменном виде алгоритм, а не писать программу.