Школа 57
8 «М» класс

Алгебра логики: Задачи

13 января 2023г
Информатика 1

Задача 1.
a) Сколько строк в таблице истинности для булевой функции $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$
b) Сколько бывает различных булевых функций $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

Задача 2. Придумать формулы для функций со следующими таблицами истинности.
a) Операция **следствие** или **импликация**, в математике $A \to B$. Утверждение A называют посылкой, а B - заключением.
b) Операция **исключающее или**, в математике $\bigoplus$, в коде a^b. Ещё говорят xor (ксор, от англ. excluding or)
c) Операция **равносильность**, в математике $\Leftrightarrow$ (реже $\equiv$), в коде ==.

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \bigoplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности импликации согласуется с бытовым применением конструкции «если ..., то ...». Представим себе, что кто-то делает следующее заявление: «Если я завтра заболею, то не прийду на занятия». Если на следующий день этот человек не заболел и пришёл на занятия, следует ли считать, что он соврал? А если он не заболел и не пришёл? И то, и другое было бы странно, ведь человек ничего не говорил про этот случай. Нечто содержательное было сказано только для той ситуации, когда он заболел. Так что, если посылка импликации ложна, то и в обычной жизни утверждение-импликацию считают истинным. Можно посмотреть на этот пример с другой стороны: в каком случае мы сочтём заявление «Если я завтра заболею, то не приду на занятия» ложным? В одном-единственном случае: когда человек заболеет, но всё равно придёт на занятия. Такое понимание согласуется с приведённой таблицей истинности для импликации.

Задача 3. Выпишите таблицы истинности для следующих формул.
a) $(A \bigoplus B) \to A$
b) $(A \to B) \to C$
c) $A \to (B \to C)$
d) $(A \bigoplus B) \to (B \bigoplus C)$
e) $(A \to B) \lor (C \land \neg B)$

Задача 4. Проверить, что следующие формулы являются тавтологиями.
a) **Закон двойного отрицания** $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
b) **Законы де Моргана** $\big(\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \land \neg B)\big)$ и $\big(\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)\big)$
c) **Дистрибутивность** $\land$ $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$
d) **Дистрибутивность** $\lor$ $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$
e) **Законы поглощения** $\big(A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A\big)$ и $\big(A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A\big)$
f) **Доказательство от противного** $\big((A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)\big)$

Задача 5. Рассмотрим целые числа x, y, z, t, w и два высказывания. A: «$x + y + z + t + w$ – чётное». B: «$x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot w$ – чётное». Докажите, что верно $A \to B$.

Задача 6. Упростить выражения
a) $A \to (A \to B)$
b) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
c) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$
d) $(\neg(A \vee B) \to (A \vee B)) \wedge B$
e) $(\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \to B)) \wedge A$
f) $(((A \vee \neg B) \to ((C \to \neg B) \vee B \vee A)) \wedge A) \to B$

Задача 7. У Юли 4 подруги: Оля, Ксюша, Настя и Маша. Она позвала одновременно их всех в гости, но некоторые из подруг поссорились между собой. Кто приедет в гости к Юле, если известно, что
(a) Если Оля и Ксюша приедут, то Настя не приедет
(b) Если Ксюша не приедет, то приедут Настя и Маша
(c) Настя точно приедет

Задача 8. Придумать формулы для функций со следующими таблицами истинности.

A	B	C	a
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	b
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

A	B	C	c
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A	B	C	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Задача 9. Какие из следующих формул являются тавтологиями?
a) $\big((A \to B) \wedge A\big) \to B$
b) $\big((A \wedge B) \to C\big) \to \big((A \to C) \wedge (B \to C)\big)$
c) $\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C)$
d) $(A \to B) \to (B \to C)$
e) $\big((A \to C) \wedge (B \to D)\big) \to \big((A \wedge C) \to (B \wedge D)\big)$
f) $\big((A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B)\big) \to B$
g) $\big(A \to (B \to C)\big) \Leftrightarrow \big((A \to B) \to C\big)$
h) $\big(A \wedge (B \to C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \to (A \wedge C)\big)$
i) $(A \to B) \vee (B \to A)$

Задача 10. Запишите пропозициональную формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.
Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

Задача 11. Проверьте правильность рассуждения. Для этого представьте каждое предложение в виде формулы и проверьте, является ли оно тавтологией. Рассмотрим 3 утверждения.
(A) Все деды - волшебники.
(B) Дед Мороз - волшебник.
(C) Существует хотя бы один дед-волшебник.
Заметим, что, очевидно, верно $(A \to B)$ т.к. если все деды волшебники, то волшебник и Дед Мороз. Также верно $(B \to C)$, ведь если Дед Мороз - волшебник, то существует хотя бы один дед-волшебник (например, тот же Дед Мороз). Но неверно $(A \to C)$, ведь утверждение о том, что все деды – волшебники, не гарантирует существование хотя бы одного деда.
Мы знаем, что $\big((A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)\big)$ – тавтология. Как разрешить полученное противоречие?

Задача 12. Докажите, что $A \vee B$ нельзя выразить через $\Leftrightarrow$, $\bigoplus$, T.

Задача 13. Докажите, что для любой булевой функции можно придумать формулу, которая задаёт эту функцию. В формуле разрешается использовать только $\neg$, $\wedge$, $\vee$
a) Можно ли обойтись $\neg$, $\wedge$?
b) Можно ли обойтись $\neg$, $\to$?
c) Можно ли обойтись $\wedge$, $\to$, F?
d) Можно ли обойтись $\wedge$, $\to$?

Задача 14. Сколько решений имеют следующие системы уравнений

$$a)\begin{cases} A \to B \equiv T \\ B \to C \equiv T \\ C \to D \equiv T \end{cases} \quad b)\begin{cases} (A_1 \to A_2) \to (A_3 \to A_4) \equiv T \\ (A_3 \to A_4) \to (A_5 \to A_6) \equiv T \\ (A_5 \to A_6) \to (A_7 \to A_8) \equiv T \end{cases} \quad c)\, A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \equiv T$$

Задача 15.
a) Сколько существует булевых функций от трёх переменных $P(A, B, C)$, изменяющих своё значение при изменении значения любой одной из переменных?
b) Придумайте электрическую схему, при которой свет в комнате включается и выключается любым из трех переключателей, независимо от состояния остальных (переключатель имеет несколько контактов и 2 состояния, в одном из которых соединено одно множество контактов, а в другом - другое).