

Задача 1.

- а) Сколько строк в таблице истинности для булевой функции $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$
 б) Сколько бывает различных булевых функций $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$

Задача 2. Придумать формулы для функций со следующими таблицами истинности.

- а) Операция **следствие** или **импликация**, в математике $A \rightarrow B$. Утверждение A называют посылкой, а B - заключением.
 б) Операция **исключающее или**, в математике $\oplus$, в коде $a^{\wedge}b$. Ещё говорят *xor* (ксор, от англ. excluding or)
 в) Операция **равносильность**, в математике $\Leftrightarrow$ (реже $\equiv$), в коде $==$.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности импликации согласуется с бытовым применением конструкции «если ..., то ...». Представим себе, что кто-то делает следующее заявление: «Если я завтра заболею, то не прийду на занятия». Если на следующий день этот человек не заболел и пришёл на занятия, следует ли считать, что он соврал? А если он не заболел и не пришёл? И то, и другое было бы странно, ведь человек ничего не говорил про этот случай. Нечто содержательное было сказано только для той ситуации, когда он заболел. Так что, если посылка импликации ложна, то и в обычной жизни утверждение-импликацию считают истинным. Можно посмотреть на этот пример с другой стороны: в каком случае мы сочтём заявление «Если я завтра заболею, то не прийду на занятия» ложным? В одном-единственном случае: когда человек заболевает, но всё равно придёт на занятия. Такое понимание согласуется с приведённой таблицей истинности для импликации.

Задача 3. Выпишите таблицы истинности для следующих формул.

- а) $(A \oplus B) \rightarrow A$
 б) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
 в) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 г) $(A \oplus B) \rightarrow (B \oplus C)$
 д) $(A \rightarrow B) \vee (C \wedge \neg B)$

Задача 4. Проверить, что следующие формулы являются тавтологиями.

- а) **Закон двойного отрицания** $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
 б) **Законы де Моргана** $(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ и $(\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$
 в) **Дистрибутивность** $\wedge$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 г) **Дистрибутивность** $\vee$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
 д) **Законы поглощения** $(A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A)$ и $(A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A)$
 е) **Доказательство от противного** $((A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

Задача 5. Рассмотрим целые числа x, y, z, t, w и два высказывания. A : « $x + y + z + t + w$ – чётное». B : « $x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot w$ – чётное». Докажите, что верно $A \rightarrow B$.

Задача 6. Упростить выражения

- $A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$
- $(\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)) \wedge B$
- $(\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \rightarrow B)) \wedge A$
- $((A \vee \neg B) \rightarrow ((C \rightarrow \neg B) \vee B \vee A)) \wedge A \rightarrow B$

Задача 7. У Юли 4 подруги: Оля, Ксюша, Настя и Маша. Она позвала одновременно их всех в гости, но некоторые из подруг поссорились между собой. Кто придет в гости к Юле, если известно, что

- Если Оля и Ксюша придут, то Настя не придет
- Если Ксюша не придет, то придут Настя и Маша
- Настя точно придет

Задача 8. Придумать формулы для функций со следующими таблицами истинности.

A	B	C	a
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	b
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

A	B	C	c
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A	B	C	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Задача 9. Какие из следующих формул являются тавтологиями?

- $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
- $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$
- $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)$
- $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D))$
- $((A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B)) \rightarrow B$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$
- $(A \wedge (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C))$
- $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

Задача 10. Запишите пропозициональную формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

Задача 11. Проверьте правильность рассуждения. Для этого представьте каждое предложение в виде формулы и проверьте, является ли оно тавтологией. Рассмотрим 3 утверждения.

(А) Все деды - волшебники.

(В) Дед Мороз - волшебник.

(С) Существует хотя бы один дед-волшебник.

Заметим, что, очевидно, верно $(A \rightarrow B)$ т.к. если все деды волшебники, то волшебник и Дед Мороз. Также верно $(B \rightarrow C)$, ведь если Дед Мороз - волшебник, то существует хотя бы один дед-волшебник (например, тот же Дед Мороз). Но неверно $(A \rightarrow C)$, ведь утверждение о том, что все деды – волшебники, не гарантирует существование хотя бы одного деда.

Мы знаем, что $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – тавтология. Как разрешить полученное противоречие?

Задача 12. Докажите, что $A \vee B$ нельзя выразить через $\Leftrightarrow, \oplus, T$.

Задача 13. Докажите, что для любой булевой функции можно придумать формулу, которая задаёт эту функцию. В формуле разрешается использовать только $\neg, \wedge, \vee$

a) Можно ли обойтись $\neg, \wedge$?

b) Можно ли обойтись $\neg, \rightarrow$?

c) Можно ли обойтись $\wedge, \rightarrow, F$?

d) Можно ли обойтись $\wedge, \rightarrow$?

Задача 14. Сколько решений имеют следующие системы уравнений

$$a) \begin{cases} A \rightarrow B \equiv T \\ B \rightarrow C \equiv T \\ C \rightarrow D \equiv T \end{cases} \quad b) \begin{cases} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (A_3 \rightarrow A_4) \equiv T \\ (A_3 \rightarrow A_4) \rightarrow (A_5 \rightarrow A_6) \equiv T \\ (A_5 \rightarrow A_6) \rightarrow (A_7 \rightarrow A_8) \equiv T \end{cases} \quad c) A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \equiv T$$

Задача 15. Сколько существует булевых функций от трёх переменных $P(A, B, C)$, изменяющих своё значение при изменении значения любой одной из переменных?

